高中数学函数必考知识点及常考题型总结

黄建春

（渝石网络 http://www.fishsting.com 中国重庆）

1、利用函数思想

例 1：已知$\mathrm{f(a)} = (\mathrm{x}-1)log_3^2a-6xlog_3a+x+1$，当 x∈[0, 1]时，f(a)恒为正数，求 a 的取值范围。

分析：从表面结构看 f(a)是一个以 $\log_3 a$ 为变量的二次函数，而实质是变量 x 的一次函数，因此可以构造 x 的一次函数求解。

解：原式变形为：$\mathrm{g(x)} = (log_3^2a-6log_3a+1)\mathrm{x}+1-log_3^2a$

因为 g(x)在区间[0, 1]上恒为正数，所以 g(0)>0 且 g(1)>0，即$1-log_3^2a>0$且$1-3log_3a>0$，解得：$\frac{1}{3}<a<\sqrt[3]{3}$

2、分离常数法

例 2：设$\mathrm{r}>0, 0<\mathrm{b}<\frac{\sqrt{2}}{2}, x>0$，如果对满足$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的 x, y，不等式$x^2-2rx+y^2\geq 0$恒成立，求 r 的取值范围。

解：令 x=acosθ，y=bsinθ；

因为 x>0，故不妨设$-\frac{\Pi}{2}<\theta<\frac{\Pi}{2}$，代入$x^2-2rx+y^2\geq 0$得：

$a^2cos^2\theta-2arcos\theta+b^2sin^2\theta\geq 0$

即：$\mathrm{r}\leq\frac{a^2-b^2}{2a}\cos\theta+\frac{b^2}{2acos\theta}$

上式对$-\frac{\Pi}{2}<\theta<\frac{\Pi}{2}$内得一切 θ 都成立，故对上述区间内得

$\mathrm{f}(\theta)=\frac{a^2-b^2}{2a}\cos\theta+\frac{b^2}{2acos\theta}$得最小值也成立,因为$-\frac{\Pi}{2}<\theta<\frac{\Pi}{2}$,所以cosθ>0

所以：$\mathrm{f}(\theta)\geq\frac{1}{2a}\cdot 2\sqrt{(a^2-b^2)cos\theta\cdot\frac{b^2}{cos\theta}}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}$

当$\cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$时等号成立（因为$0<\mathrm{b}<\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以$\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\leq 1$）

所以：f(θ)得最小值为：$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}$，所以$\mathrm{r}\leq\frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}$

3、判别式法

例 3：已知函数$\mathrm{f(x)} = x^2 - (m+5)x + 2(m+5)$在其定义域内恒为非负，求方程$\frac{2^x}{m+1} = |m-2| + 1$的根的取值范围。

解：因为 f(x)恒为非负，则$\Delta = (m+5)^2 - 8(m+5) \le 0$，解得：$-5 \le \mathrm{m} \le 3$，方程化为：

$$2^x = (m+1)(|m-2|+1)$$

当$-5 \le \mathrm{m} \le 2$时，则$2^x = (m+1)(2-m+1)$

所以：$2^x = -m^2 + 2m + 3 = -(m-1)^2 + 4$，所以$2^x \le 4$，$\mathrm{x} \le 2$

当$2 < \mathrm{m} \le 3$时，则$2^x = (m+1)(m-1) = m^2 - 1, 3 < m^2 - 1 \le 8$

所以：$log_2 3 < x \le 3$

所以方程的根的取值范围为$(-\infty, 3]$

4、利用函数的单调性

例 4：已知不等式$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{12} log_a(a-1) + \frac{2}{3}$，对一切大于 1 的自然数 n 恒成立，试确定参数 a 的取值范围。

分析：显然，只需令函数$\mathrm{f(n)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$的最小值不小于$\frac{1}{12} log_a(a-1) + \frac{2}{3}$即可。

解：设$\mathrm{f(n)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$（n∈N 且 n>1）

因为：$\mathrm{f(n+1) - f(n)} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

所以：f(n)是增函数，所以 n∈N 且 n>1 时，$\mathrm{f(n) \ge f(2)} = \frac{7}{12}$

要使$\mathrm{f(x)} \ge \frac{1}{12} log_a(a-1) + \frac{2}{3}$，对于大于 1 的自然数 n 恒成立，

必须有$\frac{1}{12} log_a(a-1) + \frac{2}{3} \le \frac{7}{12}$，所以：$log_a(a-1) \le -1$

因为 a>1，所以$\mathrm{a} - 1 \le \frac{1}{x}$，解得：$1 < \mathrm{a} \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

即 a 的取值范围是：$(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

5、恒成立问题

（1）利用一元不等式在区间上恒成立的充要条件

例 5：已知$p=(log_2x-1)(log_ab)^2-6log_2x\cdot log_ab+log_2x+1$(其中 a 为正常熟)，若当 x 在区间[1,2]内任意取值时，p 的值恒为正，求 b 的取值范围。

解：P 变形为：

$$p=[(log_ab)^2-6log_ab+1]log_2x-(log_ab)^2+1$$

设$t=log_2x$，则 t∈[0,1]

$$p=f(t)=[(log_ab)^2-6log_ab+1]t-(log_ab)^2+1$$

因此，原题变为当 t 在区间[0,1]内任意取值时，f(t)恒为正，求 b 的取值范围。

由充要条件，当

$$\begin{cases}(log_ab)^2-6log_ab+1=0\\ -(log_ab)^2+1>0\end{cases} \quad (1)$$

或

$$\begin{cases}f(0)=-(log_ab)^2+1>0\\ f(1)=-6log_ab+2>0\end{cases} \quad (2)$$

时 f(t)恒为正

解（1）得：$-1<log_ab=3-2\sqrt{2}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}<\frac{1}{3}$

解（2）得：$-1<log_ab<\frac{1}{3}$

故当 a>1 时，$\frac{1}{a}<b<\sqrt[3]{a}$

当 0<a<1 时，$\sqrt[3]{a}<b<\frac{1}{a}$

（2）利用一元二次不等式在区间上恒成立的充要条件

例 6：已知定义在 R 上得函数 f(x)为奇函数，且在[0,+∞)上是增函数，对任意实数 θ∈R，问是否存在这样的实数 m，使得 f(cos2θ-3)+f(4m-2mcosθ)>f(0)对所有的 θ 都成立？若存在，求出 m 的取值范围，若不存在，请说明理由。

解：因为 f(x)为奇函数，且在[0,+∞)上是增函数，

所以 f(x)在（-∞，+∞）上为增函数，且由 f(0)=f(-0)=-f(0),得 2f(0)=0，即 f(0)=0，由此原不等式可化为：

$$f(\cos2\theta-3)>f(2m\cos\theta-4m)$$

$$\cos2\theta-3>2m\cos\theta-4m$$

$$cos^2\theta-mcos\theta+2m-2>0$$

设 t=cosθ，因为 θ∈R，所以 t∈[−1, 1]

于是问题可以化为：当 t∈[-1,1]时，不等式$g(t)=t^2-mt+2m-2>0$是否成立。

依据充要条件有：

(1) $$\begin{cases}\Delta=m^2-8m+8\geq0\\ g(1)=m-1>0\\ \frac{m}{2}>1\end{cases}$$

或

(2) $$\begin{cases}\Delta=m^2-8m+8\geq0\\ g(-1)=3m-1>0\\ \frac{m}{2}<-1\end{cases}$$

或（3）$\Delta=m^2-8m+8<0$

解（1）得：$m\geq4+2\sqrt{2}$

解（2）得实数 m 不存在

解（3）得：$4-2\sqrt{2}<m<4+2\sqrt{2}$

综上可得：当$m>4-2\sqrt{2}$时，使得不等式对所有的 θ 都成立。

6、待定系数法

例 7：是否存在 a、b、c 使得等式：

$1\cdot2^2+2\cdot3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$对一切自然数 n 都成立？证明你的结论。

解：因为$n(n+1)^2=n^2+2n^2+n^3$

所以：$1\cdot2^2+2\cdot3^2+\cdots+n(n+1)^2=(1+2+\cdots+n)+2(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1^3+2^3+\cdots+n^3)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)+\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$

显然当 a=3，b=11，c=10 时等式对一切自然数 n 都成立。

7、不等式法

例 8：求实数 a 的取值范围，使得对任意实数 x 和任意$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，恒有$(x+3+2sin\theta cos\theta)^2+(x+asin\theta+acos\theta)^2\geq\frac{1}{8}$。

解：设$t=\sin\theta+\cos\theta$ $(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$

则不等式可化为：

$$(x+2+t^2)^2+(x+at)^2\geq\frac{1}{8}\quad(1\leq t\leq\sqrt{2})$$

由重要不等式 $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$及不等式的传递性得知：

只需$\left[\frac{(x+2+t^2)-(x+at)^2}{2}\right]^2\geq\frac{1}{16}$在 x∈R 且$1\leq t\leq 2$时恒成立即可。

将上式化简得：

$t^2-at+\dfrac{3}{2}\geq 0$　　(1)

或

$t^2-at+\dfrac{5}{2}\leq 0$　　(2)

由（1）可知：只须$a\leq t+\frac{3}{2t}$恒成立，而$t+\frac{3}{2t}\geq\sqrt{6}$，

当且仅当$t=\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\in[1,\sqrt{2}]$时，$t+\frac{3}{2t}$有最小值。

故此时$a\leq\sqrt{6}$即为所求。

由（2）同理可以求得$a\geq\frac{7}{2}$，故实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,\sqrt{6}\right]\cup[\frac{7}{2},+\infty)$

8、特值法

例 9：若$f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in R)$在区间[0, 1]上恒有$|f(x)|\leq 1$，

（1） 对所有这样的 f(x)，求|a|+|b|+|c|的最大值；

（2） 试给出一个这样的 f(x)，使|a|+|b|+|c|确实取到上述最大值。

解：因为$|f(x)|\leq 1$在 x∈[0, 1]时恒成立，则$|f(0)|\leq 1,\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leq 1$，$|f(1)|\leq 1$

而 $\begin{cases} f(0)=c \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c \\ f(1)=a+b+c \end{cases}$

因此得：

$$\begin{cases} a=2f(1)+2f(0)-4f(\frac{1}{2}) \\ b=4f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)-3f(0) \\ c=f(0) \end{cases}$$

所 以 $|a|+|b|+|c|=\left|2f(1)-4f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(0)\right|+\left|4f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)-3f(0)\right|+f(0)\le 3|f(1)|+8\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+6|f(0)|\le 17$

当等号成立时，只需 f(1)与 f(0)同号，与$f(\frac{1}{2})$异号；

即：$f(1)=f(0)=1, f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$或$f(1)=f(0)=-1, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

此时：$f(x)=8x^2-8x+1$或$-8x^2+8x-1$

9、确定主元法

例 10：设$p=(log_2x)^2+(a-2)log_2x-a+1$，若当$a\in[-2,2]$时，$p>0$恒成立，求 x 的变化范围。

解：设$p=f(a)=(log_2x-1)a+log_22x-2log_2x+1$

当$a\in[-2,2]$时的图像是一条线段，所以 a 在[-2, 2]上变动时，P 恒为正值的充要条件是：

$$\begin{cases} f(-2)>0 \\ f(2)>0 \end{cases}$$

即：$\begin{cases} log_2^2x-4log_2x+3>0 \\ log_2^2x-1>0 \end{cases}$

解得：$log_2x>3$或$log_2x<-1$

即 x 的取值范围为：$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\cup(8,+\infty)$

注：改变看问题的角度，构造关于 a 的一次函数，灵活运用“恒成立”条件，使疑难问题转化为熟悉的问题。

10、整体换元法

例 11：对一切实数 x，若二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a<b)$的值恒非负，则$m=\frac{a+b+c}{b-a}$的最小值为多少。

解：由条件$f(x)=ax^2+bx+c\ge 0$对一切$x\in R$恒成立，可知：$\Delta=b^2-4ac\le 0$

且 a>0，所以：$c \geq \frac{b^2}{4a}$

所以：$m = \frac{a+b+c}{b-a} \geq \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a} = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}$

考虑到式子$\frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}$是关于 a、b 的齐次二次分式，故可作如下变形：

$$m = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 4 \times \frac{b}{a} + 4}{4\left(\frac{b}{a} - 1\right)}$$

令$\frac{b}{a} = t$，则由 b>a 知 t>1，故

$$m = \frac{t^2+4t+4}{4(t-1)} = \frac{1}{4} \times \frac{(t+1)^2}{t-1} = \frac{1}{4} \times \frac{(t-1+3)^2}{t-1} = \frac{1}{4}\left[(t-1) + \frac{9}{t-1} + 6\right]$$
$$\geq \frac{1}{4}(2 \times 3 + 6) = 3$$

当且仅当$\begin{cases} (t-)^2 = 9 \\ b^2 = 4ac \end{cases}$

即：$\begin{cases} \frac{b}{a} = 4 \\ b^2 = 4ac \end{cases}$ 时等号成立

所以：$m_{min} = 3$

注：在多参数问题解题中，如果几个参数可结合成一个整体，则可适时采用整体换元的方法，达到减元消元的目的。