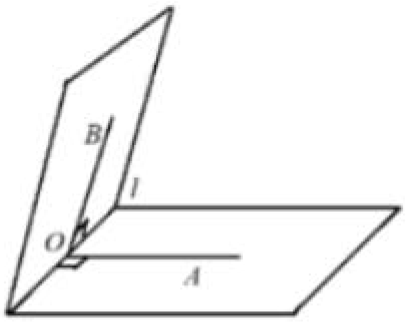
二面角5种求法

黄建春

（渝石网络 http://www.fishsting.com 中国重庆）

法一：定义法

在棱上取点，分别在两面内引两条射线与棱垂直，这两条垂线所成的角的大小就是二面角的平面角，如图在二面角α-l-β的棱上任取一点0，以0为垂足，分别在半平面α和β内作垂直于棱的射线OA和OB，则射线OA和OB所成的角称为二面角的平面角（当然两条垂线的垂足点可以不相同，那求二面角就相当于求两条异面直线的夹角即可）。



法二：三垂线法

在面α或面β内找一合适的点A，作AO⊥β于O，过A作 AB⊥c于B，则BO为斜线AB在面β内的射影，∠ABO为二面角α-c-β的平面角，如图1，具体步骤：

① 找点做面的垂线：即过点A，作AO⊥β于O；

② 过点（与①中是同一个点）做交线的垂线：即过A作AB⊥c于B，连接 BO；

③ 计算：∠ABO为二面角α-c-β的平面角，在 Rt∆ABO中解三角形。

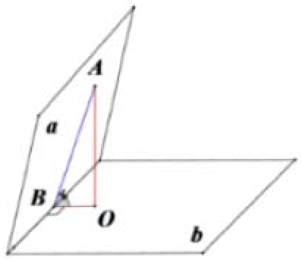


图 1

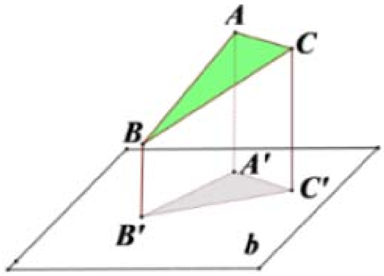


图 2

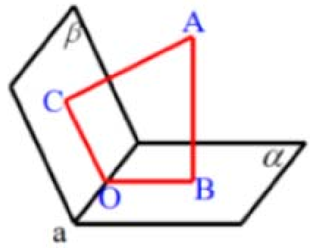


图 3

法三：射影面积法

凡二面角的图形中含有可求原图形面积和该图形在另一个半平面上的射影图形面积的都可利用射影面积公式（$\cos\theta=\frac{S_{射}}{S_{斜}}=\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}$，如图 2），求出二面角的大小；

法四：补棱法

当构成二面角的两个半平面没有明确交线时，要将两平面的图形补充完整，使之有明确的交线（称为补棱），然后借助前述的定义法与三垂线法解题。当二平面没有明确的交线时，也再直接用法三的摄影面积法解题。

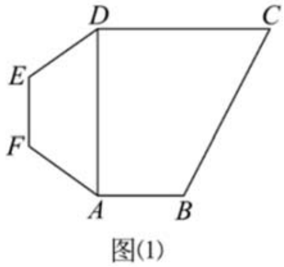
法五：垂面法

由二面角的平面角的定义可知两个面的公垂面与棱垂直，因此公垂面与两个面的交线所成的角，就是二面角的平面角。

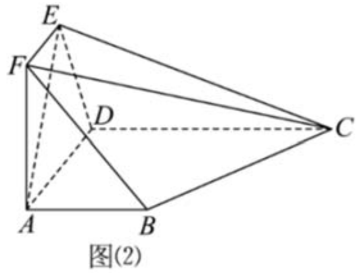
典型例题：

题型一：定义法

1、(2024•高一•江西宜春•期末）如图（1)，六边形 ABCDEF 是由等腰梯形 ADEF 和直角梯形 ABCD 拼接而成，且∠BAD=∠ADC=90，AB=AF=EF=ED=2，AD=CD=4，沿 AD 进行翻折，得到的图形如图（2）所示，且∠AEC=90。



图(1)

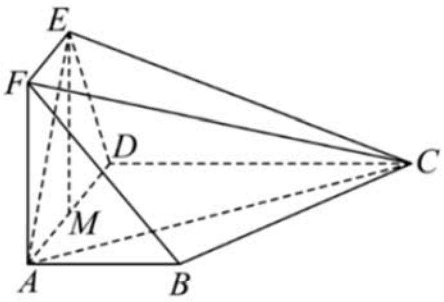


图(2)

（1）求证:CD⊥平面 ADEF。

（2）求二面角 C-AE-D 的余弦值。

【解析】(1) 在等腰梯形 $ADEF$ 中，作 $EM\perp AD$ 于 M，



则 $DM=\dfrac{AD-EF}{2}=1, AM=3, EM=\sqrt{3}$，可得 $AE=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$，

连接 AC，则 $AC=4\sqrt{2}$，

因为 $\angle AEC=90^\circ$，可得 $EC=2\sqrt{5}$，

由 $ED^2+DC^2=EC^2$，可得 $CD\perp ED$，

且 $CD\perp AD, AD\cap ED=D$，$AD, ED\subset$ 平面 $ADEF$，所以 $CD\perp$ 平面 $ADEF$.

(2) 由 (1) 可知 $CD\perp$ 平面 $ADEF$，且 $AE\subset$ 平面 $ADEF$，可得 $CD\perp AE$，

且 $CE\perp AE$，$CE\cap CD=C$，$CE, CD\subset$ 平面 CDE，可得 $AE\perp$ 平面 CDE，

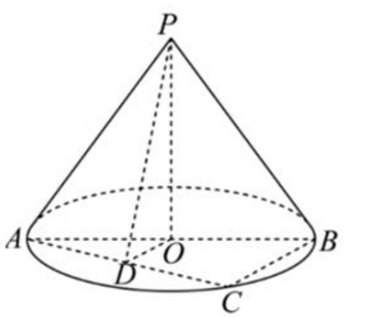
且 $DE\subset$ 平面 CDE，可得 $AE\perp DE$，

又 $AE\perp CE$，可知 $\angle CED$ 就是二面角 $C-AE-D$ 的平面角，

在 $Rt\triangle CDE$，可得 $\cos\angle CDE=\dfrac{DE}{CE}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以二面角 $C-AE-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

2、（2024・高一.全国・随堂练习）如图，在圆锥 PO 中，已知 PO=$\sqrt{2}$，◯O 的直径 AB=2，点 C 在$\widehat{AB}$上，且∠CAB=30°，点 D 为 AC 的中点。



（1）证明:AC⊥平面 POD;

（2）求二面角 P-AC-0 的正弦值。

解析：

（1）证明：连接 PC，则 PC=PA，因为点 D 为 AC 的中点，所以 PD⊥AC，

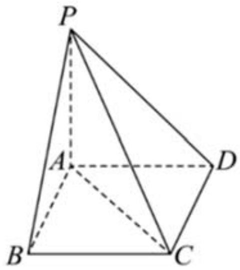
因为 AB 为○O 的直径，所以∠ACB=90°，所以 AC⊥BC，

因为 O 为 AB 的中点，D 为 AC 的中点，所以 OD∥BC，OD=1/2BC，

所以 OD⊥AC，因为 PD∩OD=D，PD，OD⊂平面 POD，所以 AC⊥平面 POD。

(2) 由 (1) 知 $PD\perp AC$，$OD\perp AC$，
所以 $\angle PDO$ 为二面角 $P-AC-O$ 的平面角，
因为 $PO\perp$ 平面 ABC，$OD\subset$ 平面 ABC，
所以 $PO\perp OD$，
因为 $\angle ACB=90^\circ$，$\angle CAB=30^\circ$，$AB=2$，
所以 $BC=\frac{1}{2}AB=1$，所以 $OD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$，
所以在 $Rt\triangle POD$ 中，$\sin\angle PDO=\frac{OP}{PD}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\frac{1}{4}}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，
所以二面角 $P-AC-O$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

3、（2024·高一·河南商丘·阶段练习）如图，四边形 ABCD 是正方形，PA⊥平面 ABCD，且 PA=AB=2，求：



（1）求二面角 B-PA-C 的大小；

（2）求二面角 A-PD-C 的大小；

（3）求二面角 B-PD-A 的大小的正弦值。

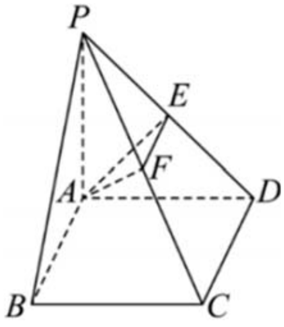
解析

（1）∵ PA⊥平面 ABCD，AB,AC⊂面 ABCD，

∵ PA⊥AB，PA⊥AC。∴∠BAC 为二面角 B-PA-C 的平面角。

又∵四边形 ABCD 是正方形，∠BAC=45°，

即二面角 B-PA-C 的大小为 45°。



（2）作 PD 的中点 E，PC 的中点 F，连接 AE，E，,AF，

∵ PA⊥平面 ABCD，AD⊂面 ABCD，∴ PA⊥ AD，

∵ PA=AB，∴ΔPAD 为等腰直角三角形，

∵E 为 PD 的中点，∴AE⊥PD

又∵ PA⊥CD，AD⊥CD，PA，AD⊂平面 PAD，

且 PA∩ AD=A，∴.CD⊥平面 PAD，∴.CD⊥PD，

∵ E，F 分别为 PD 和 PC 的中点，∴EF⊥PD，

∴ ∠AEF 为二面角 A-PD-C 的平面角。

(3) 连接 BE,BD,

$\because PB=\sqrt{AP^2+AB^2}=2\sqrt{2},BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2\sqrt{2},\therefore PB=BD,$

$\therefore BE\perp PD,\therefore\angle AEB$ 二面角 $B-PD-A$ 的大小的平面角，

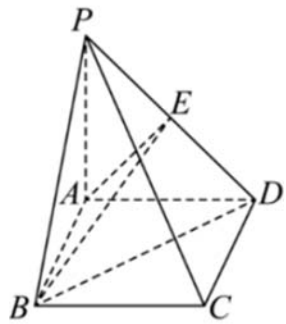
又 $\because PA\perp AB,AB\perp AD,AP,AD\subset$ 平面 PAD, 且 $PA\cap AD=A$,

$\therefore AB\perp$ 平面 $PAD,\therefore AB\perp AE,$

$\because PD=\sqrt{2}AP=2\sqrt{2},\therefore ED=\dfrac{1}{2}PD=\sqrt{2},\therefore BE=\sqrt{BD^2-ED^2}=\sqrt{6},$

$\therefore\sin\angle AEB=\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

即二面角 $B-PD-A$ 的大小的正弦值 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

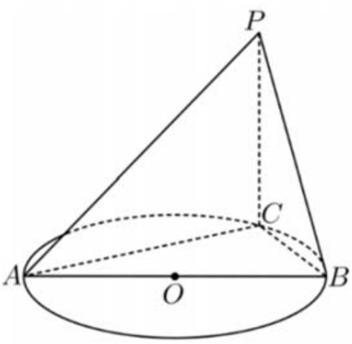


题型 2：三垂线法

1、（2024·高一·湖南长沙,阶段练习）如图，AB 是圆 O 的直径，点 C 是圆 O 上异于 A，B 的点,直线 PC⊥平面 ABC。

（1）证明：平面 PBC⊥平面 PAC；

（2）设 AB=PC=2，AC=1，求二面角 B-PA-C 的余弦值。



【解析】(1) 证明：$\because AB$ 是圆 O 的直径，

$\therefore BC\perp AC$,

又 $\because PC\perp$ 平面 ABC, $BC\subset$ 平面 ABC,

$\therefore PC\perp BC$,

$\because PC\cap AC=C$, 且 PC, $AC\subset$ 平面 PAC,

$\therefore BC\perp$ 平面 PAC,

又 $BC\subset$ 平面 PBC,

$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 PAC.

(2) 过 C 作 $CM\perp PA$ 于 M, 连结 BM,

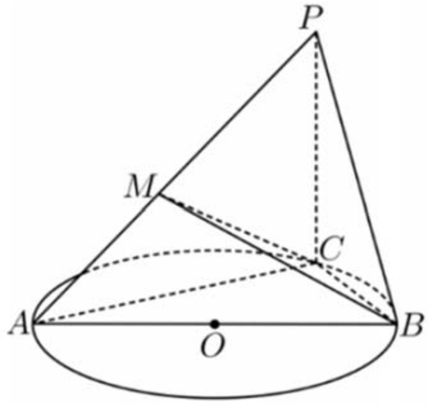
$\because BC\perp$ 平面 PAC, $PA\subset$ 平面 PAC,

$\therefore PA\perp BC$,

$\because BC\cap CM=C$, 且 BC, $CM\subset$ 平面 BCM,

$\therefore PA\perp$ 平面 BCM, 又 $BM\subset$ 平面 BCM,

$\therefore PA\perp BM$,



$\therefore \angle BMC$ 为二面角 $B-PA-C$ 的平面角，

在 $Rt\triangle BMC$ 中，$\because CM=\frac{2}{\sqrt{5}}, BC=\sqrt{3}$,

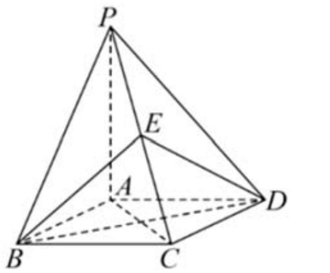
$\therefore BM=\sqrt{\frac{4}{5}+3}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{5}}$，则 $\cos\angle BMC=\frac{MC}{BM}=\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{19}}{19}$,

$\therefore$ 二面角 $B-PA-C$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{19}}{19}$.

2、（2024 •高一 •江苏南京 •阶段练习）如图，四棱锥 P-ABCD 中，PA⊥底面 ABCD，底截 ABOD 为菱形，且有 AB=1，PA=$\sqrt{2}$；∠ABC=60°，E 为 PC 中点。

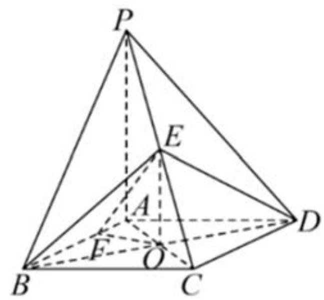
（1）证明:AC⊥面 BED；

（2）求二面角 E-AB-C 的平面角的正弦值。



解析

（1）证明：设 AC 与 BD 交于点 O，连接 EO，因为 E，O 分别为 PC，AC 的中点，所以 EO// PA，又因为 PA⊥底面 ABCD，且 BD、AC⊂底面 ABCD，所以 PA⊥BD，PA⊥AC，又因为 EO/PA，所以 EO⊥BD，EO⊥AC，AC∩BD=O。所以 EO⊥底面 ABCD。又四边形 ABCD 为菱形，所以 BD⊥AC，则 EO⊥AC,BD⊥AC,且 EO∩BD=O，EO，BD⊂平面 BED，所以 AC⊥平面 BED;



(2) 过 O 作 $OF\perp AB$ 于 F，连接 EF，

由 (1) 知 $OE\perp$ 底面 $ABCD$，且 FO、$AB\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $OE\perp AB$, $OE\perp FO$,

又 $EO\cap FO=O$, EO、$FO\subset$ 平面 EOF，所以 $AB\perp$ 平面 EOF,

又 $EF\subset$ 平面 EOF，所以 $AB\perp EF$，即 $\angle EFO$ 为二面角 $E-AB-C$ 的平面角，

因为底面 $ABCD$ 为菱形，$AB=1$, $\angle ABC=60°$,

所以 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形，则 $AO=\frac{1}{2}$, $FO=\frac{1}{2}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

又 $PA=\sqrt{2}$，则 $EO=\frac{1}{2}PA=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

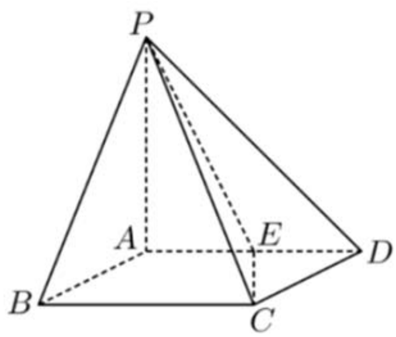
在直角三角形 EOF 中，$EF=\frac{\sqrt{11}}{4}$,

则 $\cos\angle EFO=\frac{FO}{EF}=\frac{\sqrt{33}}{11}$，所以 $\sin\angle EFO=\frac{2\sqrt{22}}{11}$,

故所求二面角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

3、（2024・高二・江苏南京・阶段练习）如图，在四棱锥 P-ABCD 中，PA⊥平面

ABCD，四边形 ABCD 为菱形，∠ADC=60°，PA=AD=4，E 为 AD 的中点。



（1）求证：平面 PCE⊥平面 PAD；

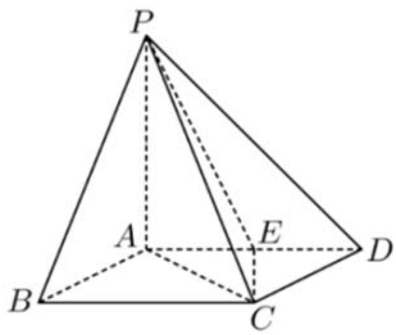
（2）求二面角 A-PD-C 的平面角的正弦值。

解析

（1）由题意，因为四边形 ABCD 为菱形，所以 DA=DC，连接 AC。

因为∠ADC=60°，

所以ΔADC 为等边三角形，从而 CA=CD。



在ΔADC 中，E 是 AD 的中点，所以 CE⊥AD。

因为 PA⊥平面 ABCD，CE⊂平面 ABCD，

所以 CE⊥PA。

∵ PA∩AD=A，PA⊂面 PAD，

AD⊂平面 PAD，CE∉面 PAD，

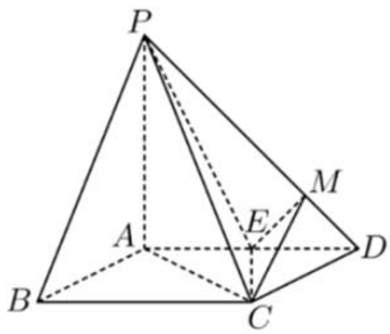
∴ EC⊥平面 PAD。

又 CE⊂平面 PCE，

∴平面 PCE⊥平面 PAD。

（2）由题意及（1）得，在平面 PAD 中，过点 E 作 EM⊥PD，垂足为 M，连接 CM。

因为 EC⊥平面 PAD，PD⊂平面 PAD，



所以 EC⊥PD。

又 EM∩CE=E，EM⊂平面 EMC，CE⊂平面 EMC，

所以 PD⊥平面 EMC。

又 CM⊂平面 EMC，所以 PD⊥CM，

从而∠EMC 是二面角 A-PD-C 的平面角。

在 RtΔEMD 中，ED=2，∠ADP=45°，

所以 EM=MD=$\sqrt{2}$，在 RtΔCMD 中，MD=$\sqrt{2}$，CD=4，

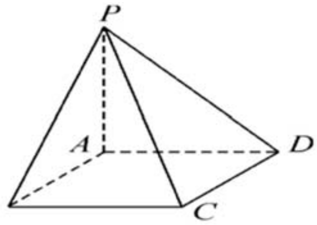
所以$\mathrm{CM}=\sqrt{CD^2-MD^2}=\sqrt{14}$。

在 Rt△CME 中，$CE=2\sqrt{3}$，$\sin\angle EMC=\frac{CE}{CM}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$，

所以二面角 A-PD-C 的平面角的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$。

题型三：射影面积法

1、如图，在四棱锥 P-ABCD 中，四边形 ABCD 为正方形，PA⊥平面 ABCD，PA=AB=a，求平面 PBA 与平面 PDC 所成二面角的大小。

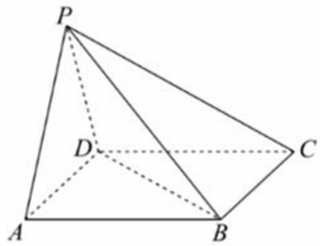


【解析】因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，
所以 $PA\perp AD$，
又 $AD\perp AB$，且 $PA\cap AB=A$，$PA,AB\subset$ 平面 PAB，
所以 $AD\perp$ 平面 PAB，
同理 $BC\perp$ 平面 PAB，
所以 ΔPCD 在平面 PBA 上的射影为 ΔPAB.

设平面 PBA 与平面 PCD 所成二面角为 θ，所以$\cos\vartheta=\frac{S_{\Delta PAB}}{S_{\Delta PCD}}=\frac{1/2a^2}{1/2a\cdot\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以：θ=45°，故平面 PBA 与平面 PCD 所成二面角的大小为 45°。

2、（2024·新疆和田·高一校考期末）在四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 是正方形，侧面 PAD 是正三角形，平面 PAD⊥底面 ABCD。



（1）证明：AB⊥平面 PAD；

（2）求面 PAD 与面 PDB 所成的二面角的正切值。

【解析】(1) 证明：∵ 底面 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AB\perp AD$，
∵ 平面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 底面 $ABCD=AD$，
∴ 由面面垂直的性质定理得，$AB\perp$ 平面 PAD；
(2)（法一）由题意，$\triangle PBD$ 在面 PAD 上的射影为 $\triangle PAD$.
设 $AD=a$，则 $S_{\triangle}PAD=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，
$\triangle PBD$ 中，$PD=a$，$BD=\sqrt{2}a$，$PB=\sqrt{2}a$，
∴ $S_{\triangle}PBD=\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{4}a^2$，
∴ 面 PAD 与面 PDB 所成的二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，
∴ 面 PAD 与面 PDB 所成的二面角的正切值为 $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

（法二）如图所示：取 PD 中点 E，连接 AE，BE。

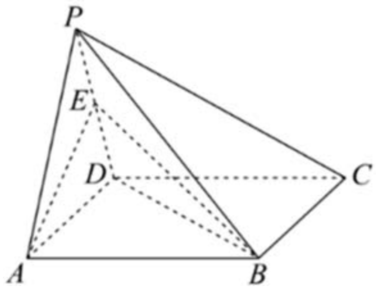
设 AD=a，则 BD=PB=$\sqrt{2}$a，

所以 AE⊥PD，BE⊥PD，

所以∠AEB 是平面 PAD 与平面 PDB 所成的二面角的平面角，

在 Rt△AEB 中，AE $=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$AB=a$，$\angle BAE=\frac{\pi}{2}$，

所以$\tan\angle AEB=\frac{AB}{AE}=\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。



3、(2024·高一课时练习) 直角三角形 ABC 的斜边在平面 α 内，两条直角边分别与平面 α 成 30°和 45°角，则这个直角三角形所在的平面与平面 α 所成的锐二面角的余弦值为________。

【解析】过点 C 作 $CD\perp$ 平面 α，垂足为 D，连接 AD,BD，

$\because AD,BD,AB\subset$ 平面 α，则 $CD\perp AD,CD\perp BD,CD\perp AB$，

设 $CD=h>0$，

不妨设 AC，BC 分别与平面 α 成 30° 和 45° 角，则 $BC=\sqrt{2}h,AC=2h,AD=\sqrt{3}h,BD=h$，

过 C 作 $CE\perp AB$，垂足为 E，连接 ED，

$\because CD\perp AB$，$CE\cap CD=C$，$CE,CD\subset$ 平面 CDE，

则 $AB\perp$ 平面 CDE，且 $DE\subset$ 平面 CDE，

$\therefore DE\perp AB$，即所求二面角的平面角为 $\angle CED$，

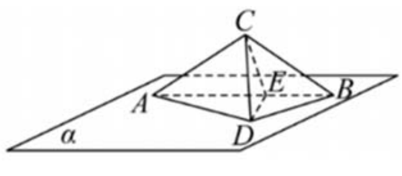
由 $\triangle ABC$ 的面积可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

由 $\triangle ABD$ 的面积可得 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}AD\cdot BD$，

$\because \cos\angle CED=\frac{DE}{CE}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot BD}{\frac{1}{2}AC\cdot BC}=\frac{\sqrt{3}h\cdot h}{2h\cdot\sqrt{2}h}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

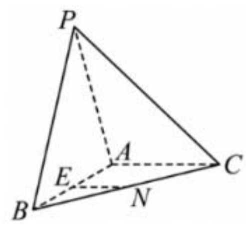
故所求锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{4}$.



题型四：垂面法

1、(2024 • 高一 • 云南玉溪 • 期末) 如图，三棱锥 P-ABC 的底面 ΔABC 是等腰直角三角形，其中 AB=AC=PA=PB=2，平面 PAB⊥平面 ABC，点 E，N 分别是 AB，BC 的中点。



（1）证明：EN⊥平面 PAB；

（2）求二面角 C-PB-A 的余弦值。

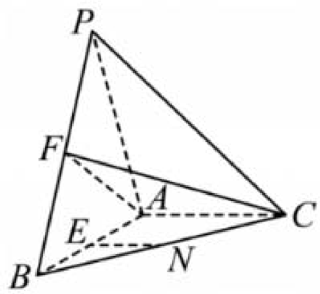
解析

（1）证明：因为三棱锥 P-ABC 的底面是等腰直角三角形，且 AB=AC=2，

所以 AB⊥AC，又点 E，N 分别是 AB，BC 的中点，故 EN∥AC，

故 EN⊥AB，又平面 PAB⊥平面 ABC，平面 PAB∩平面 ABC=AB，

EN⊂平面 ABC，故 EN⊥平面 PAB。



（2）如图，取 PB 的中点为 F，连接 AF，CF，

因为 PA=PB=AB=2，所以 AF⊥PB，AF=$\sqrt{3}$。

又平面 PAB⊥平面 ABC，平面 PAB∩平面 ABC=AB，

AB⊥AC

AC⊂平面 ABC，故 AC⊥平面 ABP，PB⊂平面 ABP，故 AC⊥PB

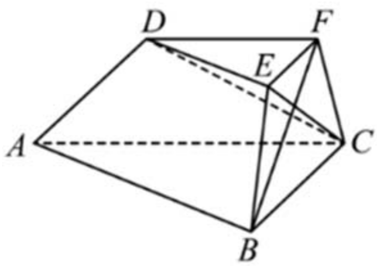
AC∩AF=A，AC，AF⊂平面 ACF，故 PB⊥平面 ACF，

CF⊂平面 ACF，故 PB⊥CF，

则∠CFA 即为所求的角，于是$\tan\angle CFA=\frac{CA}{CF}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，

$\cos\angle CFA=\frac{\sqrt{21}}{7}$，所以二面角 C-PB-A 的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$。

2、（2024·高一·安徽芜湖·期末）如图，在三棱台 ABC-DEF 中，∠ACB=90°，BF⊥AD，BC=2，BE=EF=FC=1。



（1）求证：平面 BCFE⊥平面 ABC；

（2）若直线 AE 与平面 BCFE 所成角为Π/3，求平面 DEC 和平面 ABC 所成角的正切值。

解析

（1）取 BC 中点为 O，连接 FO，

∵BE=EF=FC=1，BC=2，所以 BO=OC=FC=1，

故∠BFO=∠OBF，∠CFO=∠COF=∠FCO，

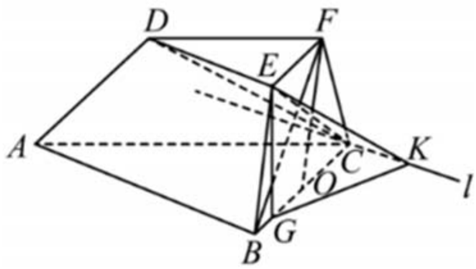
由三角形内角和可得∠BFO+∠CFO=90°，故 BF⊥FC，

又∵ BF⊥AD，AD，FC⊂平面 ADFC，AD，FC 为相交直钱，

∴ BF⊥平面 ADFC，AC⊂平面 ADFC，∴ BF⊥AC

又∵∠ACB=90°，即 BC⊥AC，BF∩BC=B，BF，BC⊂平面 BCFE，

∴ AC⊥平面 BCFE，AC 在平面 ABC 内，∴平面 BCFE⊥平面 ABC。



(2) 由 (1) 知直线 AE 与平面 $BCFE$ 所成角为 $\angle AEC$，

$\therefore \dfrac{AC}{EC}=\sqrt{3}$，由于 $AE=AF=\sqrt{BC^2-FC^2}=\sqrt{3}$，$\therefore AC=3$

设平面 DEC 和平面 ABC 的交线为 l，

由于 $AB\parallel$ 平面 DEC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $l\parallel AB$，

过点 E 作 $EG\perp BC$ 于 G，

又 (1) 知平面 $BCFE\perp$ 平面 ABC，且两平面的交线为 BC，$EG\subset$ 平面 $BCFE$，

$\therefore EG\perp$ 平面 ABC，$l\in$ 平面 ABC，所以 $EG\perp l$，

且 $EG=\sqrt{EB^2-\left(\dfrac{BC-EF}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

再过点 G 作 $GK\perp l$ 于 K，连接 EK，

$GK\cap EG=G$，$GK,EG\subset$ 平面 EGK，所以 $l\perp$ 平面 EGK，

$EK\subset$ 平面 EGK，故 $l\perp EK$，

$\because \angle EKG$ 即为所求角，

$BG=\dfrac{1}{2}$，$GC=\dfrac{3}{2}$，

$GK=GC\cdot\sin\angle BCK=\dfrac{3}{2}\sin\angle BCK=\dfrac{3}{2}\sin\angle B=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{9}{2\sqrt{13}}$

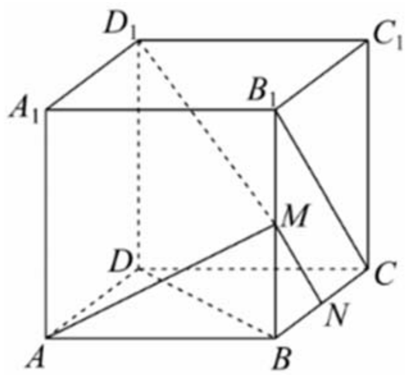
$\because \tan\angle EKG=\dfrac{EG}{EK}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{13}}{9}=\dfrac{\sqrt{39}}{9}$

题型五：补棱法

1、（2024・山东淄博・高一统考期末）如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M、N 分别为棱 BB_1、BC 的中点。

（1）证明：直线 DN∥平面 AMD_1；

（2）设平面 AMD_1 与平面 ABCD 的交线为 l，求点 M 到直线 l 的距离及二面角 $D_1\text{-}l\text{-}c$ 的余弦值



解析

（1）证明：取 CC_1 的中点 E，连接 DE、NE、ME，

在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1\parallel CC_1$ 且 $BB_1=CC_1$，

∵ M、E 分别为 BB_1、CC_1 的中点，则 BM∥CE 且 BM=CE，

故四边形 BCEM 为平行四边形，则 ME∥BC 且 ME=BC，

又因为 AD∥BC 且 AD=BC，则 ME∥AD 且 ME=AD，

故四边形 ADEM 为平行四边形，则 DE∥AM，

∵ DE⊄平面 AMD_1，AM⊂平面 AMD_1，∴ DE∥平面 AMD_1，

因为 AB∥C_1D_1 且 AB=C_1D_1，故四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，则 BC_1∥AD_1，

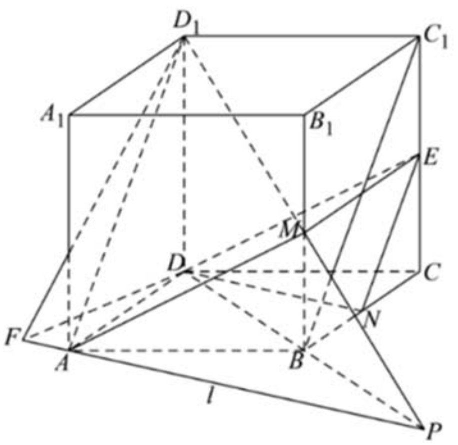
∵ N、E 分别为 BC、CC_1 的中点，则 NE∥BC_1，则 NE∥AD_1，

∵ NE⊄平面 AMD_1，AD_1⊂平面 AMD_1，∴ NE∥平面 AMD_1，

∵ DE∩NE=E，DE、NE⊂平面 DEN，所以平面 DEN∥平面 AMD_1，

∵ DN⊂平面 DEN，∴ DN∥平面 AMD_1。

（2）延长 DM、DB 交与点 P，连接 AP，则直线 AP 即为直线 l，



因为 BB_1//DD_1 且 BB_1=DD_1，M 为 BB_1 的中点，则$\frac{PM}{PD_1}=\frac{PB}{PD}=\frac{BM}{DD_1}=\frac{1}{2}$,

故点 B 为 PD 的中点，M 为 PD_1 的中点，

在 $\triangle ABP$ 中，$AB=2$，$BP=BD=2\sqrt{2}$，$\angle ABP=135°$，

由余弦定理可得 $AP^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cos135°=20$，则 $AP=2\sqrt{5}$，

$\cos\angle BAP=\frac{AB^2+AP^2-BP^2}{2AB\cdot AP}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin\angle BAP=\sqrt{1-\cos^2\angle BAP}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

过点 D 在平面 $ABCD$ 内作 $DF\perp$ 直线 AP，垂足为点 F，连接 D_1F，

$\sin\angle DAF=\sin(90°-\angle BAP)=\cos\angle BAP=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以，$DF=AD\sin\angle DAF=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

∵ $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$l\subset$ 平面 $ABCD$，∴ $DD_1\perp l$，

∵ $DF\perp l$，$DF\cap DD_1=D$，DF、$DD_1\subset$ 平面 DD_1F，∴ $l\perp$ 平面 DD_1F，

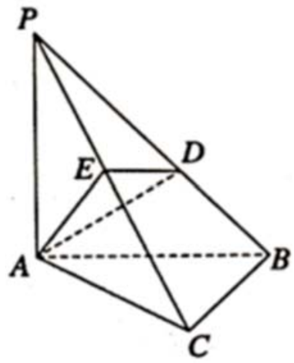
∵ $D_1F\subset$ 平面 DD_1F，∴ $D_1F\perp l$，故二面角 D_1-l-C 的平面角为 $\angle D_1FD$，

且 $D_1F=\sqrt{DD_1^2+DF^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，故点 M 到直线 l 的距离为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\angle D_1FD=\dfrac{DF}{D_1F}=\dfrac{2}{3}$，因此，二面角 D_1-l-C 的平面角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

2、（2024·湖南常德·高一临澧县第一中学校考期末）《九章算术》是中国古代的一部数学专著，是《算经十书》中最重要的一部，成于公元一世纪左右，它是一本综合性的历史著作，是当时世界上最简练有效的应用数学，它的出现标志着中国古代数学形成了完整的体系。《九章算术》中将由四个直角三角形组成的四面体称为“鳖臑”,已知在三棱锥 P-ABC 中，PA⊥平面 ABC。

（1）从三棱锥 P-ABC 中选择合适的两条棱填空：___⊥___，则三棱锥 P-ABC 为“鳖臑”;



（2）如图，已知 AD⊥PB，垂足为 D，AE⊥PC，垂足为 E，∠ABC= 90°。

（i）证明：平面 ADE⊥平面 PAC;

（ii）设平面 ADE 与平面 ABC 交线为 l，若 PA=$2\sqrt{3}$，AC=2，求二面角 E-l-C 的大小。

解析

（1）因为“鳖臑”是由四个直角三角形组成的四面体，又 PA⊥平面 ABC，

所以 PA⊥AB，PA⊥AC，PA⊥BC；即 ΔPAB，ΔPAC 为直角三角形；

若 BC⊥AB，由 AB∩PA=A，AB，PA⊂平面 PAB，可得：BC⊥平面 PAB；

所以 BC⊥PB，即 ΔABC，ΔPBC 为直角三角形；满足四个面都是直角三角形；同理，可得 BC⊥AC 或 BC⊥PB 或 BC⊥PC，都能满足四个面都是直角三角形；故可填：BC⊥AB 或 BC⊥AC 或 BC⊥PB 或 BC⊥PC。

（2）（i）证明：

∵ PA⊥平面 ABC，BC⊂平面 ABC，

∴ PA⊥BC，

又 BC⊥AB，PA∩AB=A，PA，AB⊂平面 PAB，

∴ BC⊥平面 PAB，又 AD⊂平面 PAB，∴ BC⊥AD，

又 AD⊥PB，PB∩BC=B，PB，BC⊂平面 PBC，∴AD⊥平面 PBC,

又 PC⊂平面 PBC，∴ PC⊥AD，

又 AE⊥PC，AE∩AD=A，AD，AE⊂平面 ADE，∴ PC⊥平面 ADE，

又 PC⊂平面 PAC，∴ 平面 ADE⊥平面 PAC。

(ii) 由题意知，在平面 PBC 中，直线 DE 与直线 BC 相交.

如图所示，设 $DE\cap BC=F$，连结 AF，则 AF 即为 l.

$\because PC\perp$ 平面 AED，$l\subset$ 平面 AED，

$\therefore PC\perp l$，

$\because PA\perp$ 平面 ABC，$l\subset$ 平面 ABC，

$\therefore PA\perp l$，

又 $PA\cap PC=P$，$PA,PC\subset$ 平面 PAC，

$\therefore l\perp$ 平面 PAC，

又 $AE,AC\subset$ 平面 PAC，

$\therefore AE\perp l$，$AC\perp l$.

$\therefore \angle EAC$ 即为二面角 $E-l-C$ 的一个平面角.

在 $\triangle PAC$ 中，$PA\perp AC$，$PA=2\sqrt{3}$，$AC=2$，

$\therefore PC=4$，

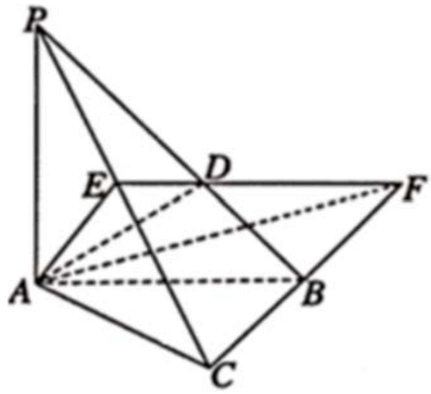
又 $AE\perp PC$，

$\therefore AE=\dfrac{AP\times AC}{PC}=\dfrac{2\sqrt{3}\times 2}{4}=\sqrt{3}$，

$\therefore \cos\angle EAC=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \angle EAC=30^\circ$，

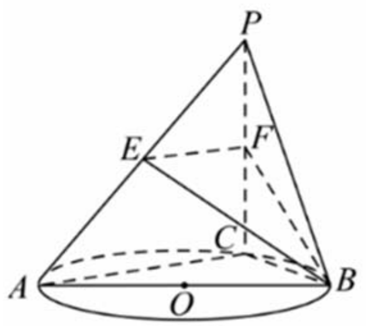
$\therefore$ 二面角 $E-l-C$ 的大小为 30°.



3、（2024·黑龙江牡丹江·高一牡丹江一中校考期末）如图，AB 是圆 O 的直径，点 C 是圆 O 上异于 A，B 的点，直线 PC⊥平面 ABC，E，F 分别是 PA，PC 的中点。

（1）记平面 BEF 与平面 ABC 的交线为 l，试判断直线 l 与平面 PAC 的位置关系，并加以证明；

（2）设 PC=2，AB=4，求二面角 E-l-C 大小的取值范围。

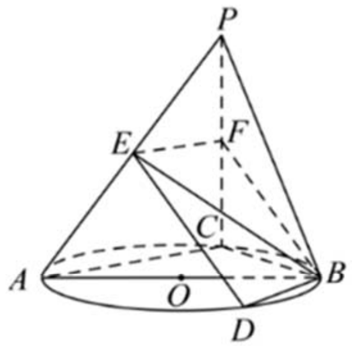


【解析】(1) $\because EF\parallel AC$，$AC\subset$ 平面 ABC，$EF\not\subset$ 平面 ABC，$\therefore EF\parallel$ 平面 ABC，

又 $EF\subset$ 平面 BEF，平面 BEF 与平面 ABC 的交线为 l，所以 $EF\parallel l$，

而 $l\not\subset$ 平面 PAC，$EF\subset$ 平面 PAC，所以 $l\parallel$ 平面 PAC；

(2) 设直线 l 与圆 O 的另一个交点为 D，连接 DE，FB，如图：



由 (1) 知，$BD \parallel AC$，而 $AC \perp BC$，所以 $BD \perp BC$，

所以 $PC \perp$ 平面 ABC，所以 $PC \perp BD$，

而 $PC \cap BC = C$，所以 $BD \perp$ 平面 PBC，

又 $FB \subset$ 平面 PBC，所以 $BD \perp BF$，

所以 $\angle FBC$ 就是二面角 $E-l-C$ 的平面角，

因为 $PC = 2AB = 4$，点 F 是 PC 的中点，所以 $FC = \frac{1}{2}PC = AB = 2$，

故 $\tan\angle FBC = \frac{FC}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\cos\angle ABC}$，

注意到 $0 < \angle ABC < \frac{\pi}{2}$，所以 $0 < \cos\angle ABC < 1$，所以 $\tan\angle FBC > 1$，

因为 $0 < \angle FBC < \frac{\pi}{2}$，所以 $\angle FBC \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$，

所以二面角 $E-l-C$ 大小的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.