求函数值域的十二种常用方法

黄建春

（渝石网络 http://www.fishsting.com 中国重庆）

方法一：直观法

通过观察如$\mathrm{f(x)}=\sqrt{ax+b}+c, f(x)=ax^2+b$或$\mathrm{f(x)}=\frac{b}{x^2+a}$等函数的定义域及性质，结合函数的解析式，应用不等式性质，可直接求得函数的值。.

例题 1：函数$\mathrm{f(x)}=3+\sqrt{2-3x}$的值域为（ ）

解析：$\sqrt{2-x}\geq 0$，故$3+\sqrt{2-x}\geq 3$，$\therefore$ f(x)的值域为$[3,+\infty)$。

例题 2：求函数$\mathrm{f(x)}=\sqrt{8-2^x}$的值域。

解析：$\because z^x>0, \therefore 0\leq 8-2^x<8, \therefore 0\leq\sqrt{8-2^x}<2\sqrt{2}$，故函数 f(x)的值域为$[0,2\sqrt{2})$。

方法二：单调性方法

单调性法是求函数值域的常用方法，就是利用我们所学的基本初等函数的单调性，再根据所给定义域来确定函数的值域。

典例 3：求函数$\mathrm{y}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$的值域。

解析：$\mathrm{y}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}, x\geq 1, \therefore \sqrt{x+1}, \sqrt{x-1}$都是增函数，故：

$\mathrm{y}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$是减函数，因此当 x=1 时，$y_{max}=\sqrt{2}$，又$\because \mathrm{y}>0, \therefore \mathrm{y}\in(0,\sqrt{2}]$。

典例 4：求函数$\mathrm{f(x)}=log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+5)\ (0\leq x\leq 2)$的值域。

解析：令$\mu=x^2-3x+5\ (0\leq x\leq 2)$，所以$\mathrm{y}=log_{\frac{1}{2}}\mu$

因为$\mu=x^2-3x+5$在$\left[0,\frac{3}{2}\right]$上是减函数，在$\left[\frac{3}{2},2\right]$上是增函数；又因为$\mathrm{y}=log_{\frac{1}{2}}\mu$在定义域上是减函数，所以 f(x)在$\left[0,\frac{3}{2}\right]$上是增函数，在$\left[\frac{3}{2},2\right]$上是减函数。当 x=0 时，f(x)=-$\log_2 5$

当 x=3/2 时，f(x)=-$\log_2(11/4)$，当 x=2 时，f(x)=-$\log_2 3$，故 f(x)函数的值域为$[-log_2 5,-log_2\frac{11}{4}]$。

方法三：配方法

型如 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$型或可转化为二次型的函数，用此种方法，注意自变量 x 的范围。

典例 5：当$1\le x\le 2$时，求函数 $y=-x^2-x+1$ 的值域。

解析：$y=-x^2-x+1=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，对称轴为 x=-1/2，故当$1\le x\le 2$时，函数 y 单调递减，$y_{max}=-1-1+1=-1, y_{min}=-4-2+1=-5$，故函数的值域为[-5, -1]。

方法四：分离常熟法

型如$f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$时，可化简成$f(x)=k+\frac{m}{ax+b}$的格式；

型如$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$的函数，可化简成$f(x)=k+\frac{f}{dx^2+ex+f}$的格式。

若分离较为困难，则可将分子或分母设为一个整体，用一个字母代替及换元再分离常数。

典例 6：求下列函数的值域：

（1）$y=\frac{2x-1}{3x+2}$

（2）$y=\frac{5x^2+9x+4}{x^2-1}$

解析：（1）$\because y=\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{\frac{2}{3}(3x+2)-\frac{7}{3}}{3x+2}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{7}{3}}{3x+2}$

$\because \frac{\frac{7}{3}}{3x+2}\neq 0$，故$y\neq\frac{2}{3}$，故函数的值域为：$(-\infty,\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},+\infty)$。

（2）$\because\ y=\frac{5x^2+9x+4}{x^2-1}=\frac{5(x^2-1)+9x+9}{x^2-1}=5-\frac{9}{x-1},\therefore y\neq 5$，又因为$x^2-1\neq 0$，即：$x\neq\pm1$，所以$y\neq\frac{1}{2}$；所以函数的值域为：$\left\{y|\ y\neq 5 \text{ 且} y\neq\frac{1}{2}\right\}$。

方法五：换元法

此种方法适用于求根式形函数或形式较为复杂的函数的值域，换元后要注意新元的取值范围，换元法求函数值域，其实质是等价转换的思想方法。

典例 7：求$y=2x-\sqrt{x-1}$函数的值域：

解析：换元法：令$t=\sqrt{x-1},(t\geq 0)$，则：

$y=2x-\sqrt{x-1}=2t^2+2-t=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\geq\frac{15}{8}$，当$t=\frac{1}{4}$时取等号，故其值域为$[\frac{15}{,8},+\infty]$。

典例 8：求函数$y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$的值域。

解析：因为$\sqrt{1-x}^2+\sqrt{1+x}^2=2$，所以可设：$\sqrt{1-x}=\sqrt{2}sin\theta,\sqrt{1+x}=\sqrt{2}cos\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

则：$y=\sqrt{2}sin\theta+\sqrt{2}cos\theta=2sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\sqrt{2},\ 2\right]$

方法六： **判别式法**

型如$f(x)=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}(a_1,a_2$不同时为零)及$f(x)=ax+b\pm\sqrt{cx^2+dx+e}$的函数求值域，通常把其转化成关于 x 的一元二次方程 F(x, y)=0，由判别式 Δ⩾0, 求得 y 的取值范围，即为原函数的值域。

注意：判别式法适用于分式上下不含有公因式的情况，当含有公因式时，应选择化简再分离常数的方法。

典例 9：求函数的值域：$y=\frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$

解析：$\because\ x^2+x+1>0$恒成立，所以函数的定义域为 R。

由$y=\frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$得：$(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$

当 y-2=0，即 y=2 时，即 3x+0=0，$\therefore x=0\in R$

当 y-2≠0，即 y≠2 时，

$\because x\in R$时方程$(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$恒有时跟，

$\Delta=(y+1)^2-4\times(y-2)^2\geq 0,\therefore 1\leq y\leq 5$ 且$y\neq 2$，

原函数得值域为[1, 5]。

典例 10：求函数的值域：$y=\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$

解析：$y=\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x-3}{x+3}=1-\frac{6}{x+3}\quad(x\neq 2)$

$\because x\neq 2,\therefore\ \frac{6}{x+3}\neq 0$ 且$\frac{6}{x+3}\neq\frac{6}{5}$;

函数的值域为：$\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5},1\right)\cup(1,+\infty)$。

(该分式含有公因式，所以不适合用判别式法进行求解)

方法七：平方法

适用于$y=\sqrt{a-bx}+\sqrt{c+dx}$的无理函数，左右同时平方，再利用二次函数求根式部分的值域(注意函数的定义域)。

典例 11：$f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}$

解析：$f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}$的定义域[-1, 2]，

$$f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=\sqrt{3+2\sqrt{-x^2+x+2}}=\sqrt{3+2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}}$$

$$\because 0\le-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\le\frac{9}{4},\therefore\sqrt{3}\le\sqrt{3+2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}}\le\sqrt{6};$$

即函数的值域为：$[\sqrt{3},\sqrt{6}]$。

方法八：分段函数法

此种方法适合用与含绝对值符号的函数，注意:绝对值符号去对是关键。

典例 12：求函数的值域：y=|x-1|+|x+4|。

解析：$y=|x-1|+|x+4|=\begin{cases}-2x-3 & (x\le-4)\\ 5 & (-4<x<1)\\ 2x+3 & (x\ge3)\end{cases}$ 根据图像可求得值域

$\therefore y\ge5,\therefore$ 函数的值域为$[5,+\infty)$。

方法九：反函数法

利用反函数的定义域是原函数的值域的关系即可求出原函数值域，注意：使用此方法的前提是原函数存在反函数。

典例 13：求函数$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$的值域

解析：设$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，由原式得$e^x=\frac{1+y}{1-y}>0,\therefore -1<y<1$，即函数的值域为(-1, 1)。

方法十：均值不等式

第一步：观察函数解析式的形式，型如$y=\frac{ex+f}{ax^2+bx+c}$或$y=\frac{ax^2+bx+c}{ex+f}$的函数；

第 2 步:对函数进行配凑成$y=ax+\frac{b}{x}$形式，再利用基本不等式求函数的最值，进而得到函数的值域。

典例 14：已知 x≥5/2，求函数$f(x)=\frac{x^2-4x+5}{2x-4}$的最小值。

解析：因为$x\geq\frac{5}{2}$，所以 x-2>0，所以$f(x)=\frac{x^2-4x+5}{2x-4}=\frac{(x-2)^2+1}{2(x-2)}=\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2(x-2)}$;

则：$f(x)\geq 2\sqrt{\frac{(x-2)}{2}\times\frac{1}{2(x-2)}}=1$. 当且仅当$\frac{x-2}{2}=\frac{1}{2(x-2)}$，即 x=3 时等号成立，因为 x=3 在定义域内，所以最小值为 1。

也可以利用换元和不等式法结合的方式进行处理。

令 2x-4=t，t≥1，解得：$x=\frac{t+4}{2}$，$f(t)=\frac{t^2+4}{4t}=\frac{1}{4}\left(t+\frac{4}{t}\right)$，根据基本不等式：

$\frac{1}{4}\left(t+\frac{4}{t}\right)\geq\frac{1}{4}\times 2\sqrt{t\times\frac{4}{t}}=1$，t=2 时函数取得最小值为 1。

方法十一：利用函数的有界性

（1） $y=\frac{a\sin x+b}{c\sin x+d}$或$y=\frac{a\cos x+b}{c\cos x+d}$型，解出 sinx（或 cosx），利用|sinx|≤1（或|cosx|≤1）去解；或用分离常熟的方法去解决。

（2） $y=\frac{a\sin x+b}{c\sin x+d}$或$y=\frac{a\cos x+b}{c\cos x+d}$型，可化为 sin(x+φ)=g(y)去处理；或用万能公式换元后用判别式去处理，当 a=c 时，还可利用数形结合的方法去处理。

典例 15：求函数$y=\frac{2cosx+1}{2cosx-1}$的值域。

解析：法一：原函数变形为$y=1+\frac{2}{2cosx-1}$，$\because\ |cosx|\leq 1$，可直接得到：y≥3 或 y≤1/3。

法二：原函数变形为$cosx=\frac{y+1}{2(y-1)}$，$\because\ |cosx|\leq 1$，$\therefore\left|\frac{y+1}{2(y-1)}\right|\leq 1$，$\therefore y\geq 3$ 或 $y\leq\frac{1}{3}$

典例 16：求函数$y=\frac{sinx-1}{cosx-2}$的最大值和最小值。

解析：由已知得：ycosx-2y=sinx-1，即 sinx-ycosx=1-2y，得：

$\sqrt{y^2+1}\sin(x+\varphi)=1-2y$（其中 φ 角得正切值 tanφ=y），

所以：$\sin(x+\varphi)=\frac{1-2y}{\sqrt{y^2+1}}$，因为：$|\sin(x+\varphi)|\leqslant 1$，因而有$\left|\frac{1-2y}{\sqrt{y^2+1}}\right|\leq 1$，

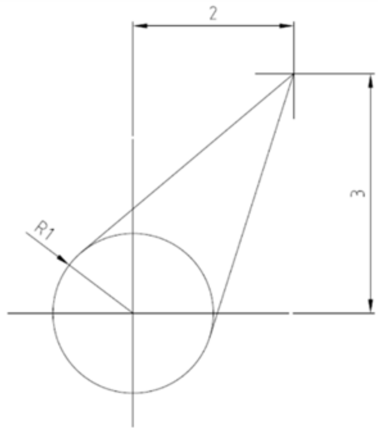
解得：$0\leq y\leq\frac{4}{3}$，所以$y_{max}=\frac{4}{3}, y_{min}=0$

方法十二：数形结合法：

利用函数所表示的几何意义，借助于图象的直观性来求函数的值域，是一种常见的方法，如何将给定函数转化为我们熟悉的模型是解答此类问题的关键。

典例 17：求函数$y=\frac{3-sinx}{2-cosx}$的值域。

解析：由题意可得：函数可看成定点(2,3)到动点(cosx, sinx)的斜率；又动点(cosx, sinx)在单位圆上，所以问题转化为求定点(2,3)到单位圆连线斜率的问题。



设直线的方程为：y-3=k(x-2)，所以 kx-y-2k+3=0

因为直线与圆相切，所以：$d=\frac{|-2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}$. 所以：$k=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$，所以函数的值域为：$\left[\frac{6-2\sqrt{3}}{3},\quad\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right]$。